MECANIQUE DES FLUIDES

Masse volumique - Principe d'Archimède

EXERCICES

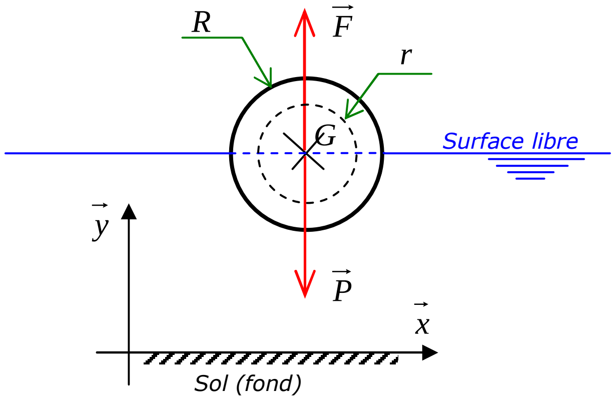
Feuille n°5

CORRECTION

On souhaite faire flotter une sphère creuse en acier de telle sorte que la ligne de flottaison passe par le centre de la sphère et y reste (équilibre de la sphère flottante). L'épaisseur de la sphère (différence entre les deux rayons) est imposée : $e = R - r = 5\ mm$.

L'objectif est de déterminer les dimensions de la sphère, c'est-à-dire ses rayons extérieur et intérieur, R et r.

On donne un schéma de la situation :



Q1 – Exprimer l'intensité F de la poussée d'Archimède en fonction du rayon extérieur R.

La poussée d'Archimède est donnée par la relation générale $F = \rho \cdot g \cdot V$ (1)

avec :

- F la poussée, en N,
- ρ la masse volumique du milieu liquide, ici de l'eau douce : $\rho_{eau} = 1000\ kg \cdot m^{-3}$,
- g l'intensité du champ de pesanteur : $g = 9{,}81\ m \cdot s^{-2}$ (sur terre),
- V le volume de liquide déplacé par le corps immergé, en m^3,

Dans notre cas, seule la moitié inférieure de la sphère est immergée et en notant :

- $V_{apparent} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$ le volume total apparent de la sphère
- $V_1 = \frac{V_{apparent}}{2} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^3$ le volume apparent en dessous de la ligne de flottaison (partie immergée)

La relation générale (1) devient : $F = \rho_{eau} \cdot g \cdot V_1$ soit :

$$\boxed{F = \frac{2}{3} \cdot \rho_{eau} \cdot g \cdot \pi \cdot R^3} \qquad (6)$$

Q2 – L'accélération subit par la sphère est nulle ; pourquoi ?

L'énoncé indique que « *la sphère flottante est en* <u>*équilibre*</u> ». Or, d'après le PFD, l'équilibre est obtenu si le système étudié (ici la sphère) ne subit pas d'accélération. Donc :

La sphère ne subit pas d'accélération.

Q3 – Par application du PFD, exprimer l'intensité du poids $\vec{P}$ de la sphère.

PFD : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \cdot \overrightarrow{a_G}$ avec $\overrightarrow{a_G} = \vec{0}$ car il y a équilibre.

On se limite à la projection sur l'axe $\vec{y}$ du théorème de la résultante :

$$F - P = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P = F$$

Partant de (6), on a :

$$\boxed{P = \frac{2}{3} \cdot \rho_{eau} \cdot g \cdot \pi \cdot R^3} \qquad (7)$$

Q4 – Partant de l'expression de P, exprimer la masse m de la sphère.

Le poids P de la sphère est fonction de la masse : $P = m \cdot g \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{P}{g}$ (8)

En rapprochant (7) et (8), on a :

$$\boxed{m = \frac{2}{3} \cdot \rho_{eau} \cdot \pi \cdot R^3} \qquad (9)$$

<u>Remarque</u> : *le champ de pesanteur g a « disparu » ; cela est du au fait que son effet sur le poids P de la sphère est compensé par son effet sur la poussée d'Archimède. La masse de la sphère ne dépend donc pas de l'intensité du champ de pesanteur.*

Q5 – Exprimer la masse m de la sphère en fonction de la masse volumique de l'acier et de son volume réel.

La masse de la sphère est également accessible par la définition de la masse volumique :

$$\rho_{acier} = \frac{m}{V_{reel}} \quad \Leftrightarrow \quad m = \rho_{acier} \cdot V_{reel} \qquad (10)$$

où $V_{réel}$ est le volume réel de la sphère (et non son volume apparent $V_{apparent}$, car n'oublions pas que la sphère est creuse). Le volume réel vaut donc :

$$V_{réel} = V(R) - V(r) = \left(\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3\right) - \left(\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3\right) = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot\left(R^3 - r^3\right) \qquad (11)$$

(10) et (11) donne alors :

$$\boxed{m = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot\rho_{acier}\cdot\left(R^3 - r^3\right)} \qquad (12)$$

Q6 – Rechercher les rayons de la sphère.

Il suffit d'identifier les relations (9) et (12) :

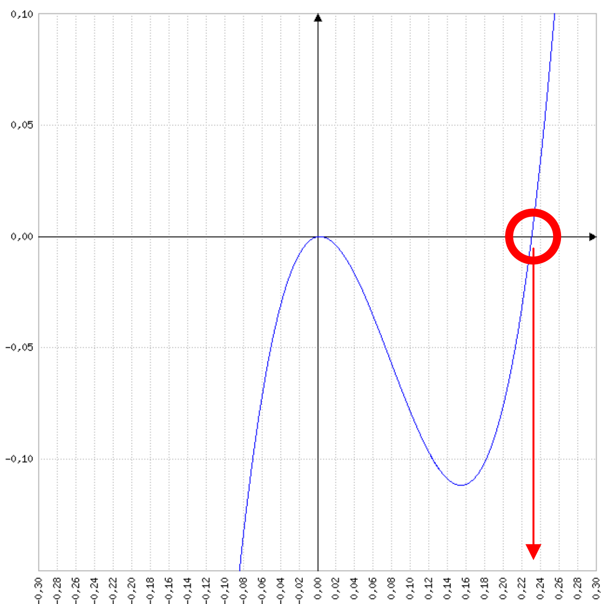
$$\frac{2}{3}\cdot\rho_{eau}\cdot\pi\cdot R^3 = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot\rho_{acier}\cdot\left(R^3 - r^3\right) \iff \rho_{eau}\cdot R^3 = 2\cdot\rho_{acier}\cdot\left(R^3 - r^3\right) \qquad (13)$$

Il y a ici deux inconnues, R et r ; il nous faut donc une deuxième relation et c'est l'énoncé qui la donne :

$e = R - r$ (14) (e étant l'épaisseur connue).

(13) et (14) donne :

$$\rho_{eau}\cdot R^3 = 2\cdot\rho_{acier}\cdot\left(R^3 - (R-e)^3\right)$$
$$\rho_{eau}\cdot R^3 = 2\cdot\rho_{acier}\cdot\left(R^3 - \left(R^3 - 3\cdot R^2\cdot e + 3\cdot R\cdot e^2 - e^3\right)\right)$$
$$\rho_{eau}\cdot R^3 = 2\cdot\rho_{acier}\cdot\left(R^3 - R^3 + 3\cdot R^2\cdot e - 3\cdot R\cdot e^2 + e^3\right)$$
$$\rho_{eau}\cdot R^3 = 2\cdot\rho_{acier}\cdot\left(3\cdot R^2\cdot e - 3\cdot R\cdot e^2 + e^3\right)$$
$$\frac{\rho_{eau}}{2\cdot\rho_{acier}}\cdot R^3 = 3\cdot R^2\cdot e - 3\cdot R\cdot e^2 + e^3$$
$$\frac{\rho_{eau}}{2\cdot\rho_{acier}}\cdot R^3 - 3\cdot e\cdot R^2 + 3\cdot e^2\cdot R - e^3 = 0$$



On a donc un polynôme de degré 3 à résoudre ; on se propose de rechercher les racines graphiquement (car analytiquement, c'est compliqué pour nous) :

$$63{,}7\cdot R^3 - 15\cdot R^2 + 0{,}075\cdot R - 1{,}25\cdot 10^{-4} = 0$$

On constate graphiquement que ce polynôme ne possède qu'une seule racine et qu'elle vaut $R \approx 0{,}23\ m$.

Et, $r = R - e = 0{,}23 - 0{,}005 = 0{,}225\ m$

Ainsi, $\boxed{R \approx 230\ mm}$ $\boxed{r \approx 225\ mm}$

Q7 – Proposer une technique pour vérifier si les résultats trouvés sont justes.

Technique proposée :

Le volume de liquide déplacé a été défini comme étant égal à la moitié du volume apparent de la sphère.

On peut donc poser $V_{déplacé} = k \cdot V_{apparent}$ et vérifier si on a bien $k = \frac{1}{2}$.

Mise en œuvre de la technique :

Partons du PFD à l'équilibre projeté sur $\vec{y}$:

$$\vec{y} \cdot \sum \overrightarrow{F_{ext}} = 0$$
$$F - P = 0$$
$$(\rho_{eau} \cdot g \cdot V_{déplacé}) - (m \cdot g) = 0$$
$$\rho_{eau} \cdot V_{déplacé} - m = 0$$
$$\rho_{eau} \cdot k \cdot V_{apparent} - \rho_{acier} \cdot V = 0$$
$$\rho_{eau} \cdot k \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 - \rho_{acier} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (R^3 - r^3) = 0$$
$$\rho_{eau} \cdot k \cdot R^3 - \rho_{acier} \cdot (R^3 - r^3) = 0$$
$$k = \frac{\rho_{acier} \cdot (R^3 - r^3)}{\rho_{eau} \cdot R^3}$$
$$k = \frac{7850 \times (0{,}23^3 - 0{,}225^3)}{1000 \times 0{,}23^3}$$

$$k = 0{,}500$$

Les résultats trouvés sont donc justes.

Q8 – Calculer la masse de la sphère creuse.

Par définition, $\rho_{acier} = \frac{m}{V}$ soit :

$$m = \rho_{acier} \cdot V$$
$$= \rho_{acier} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (R^3 - r^3)$$
$$= 7850 \times \frac{4}{3} \times \pi \times (0{,}230^3 - 0{,}225^3)$$

$$\boxed{m = 25{,}52\ kg}$$